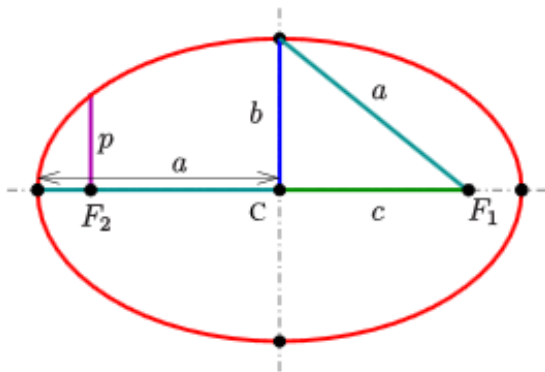


Ellipszisszel kapcsolatos képletekről

Előző dolgozatunkban – melynek címe: **A Lenz - vektorról** – viszonylag sokat kellett ellipszisszel kapcsolatos képletekkel dolgozni. Ennek során is adódott pár észrevételünk, megfigyelésünk, melyekről itt számolunk be.

1. Az ellipszis paramétereiről

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra – forrása:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4d/Ellipse-param.svg/296px-Ellipse-param.svg.png>

Az itt feltüntetett ***a***, ***b***, ***c***, ***p*** paraméterek elnevezései:

- ~ ***a***: az ellipszis *fél nagytengelye*, illetve ennek hossza;
- ~ ***b***: az ellipszis *fél kistengelye*, illetve ennek hossza;
- ~ ***c***: az ellipszis *lineáris excentricitása*, illetve ennek hossza,
- ~ ***p***: az ellipszis *paramétere* / *semi - latus rectum*, illetve ennek hossza.

A köztük fennálló egyik fontos összefüggés az 1. ábra szerint, *Pitagorász* tételével adódik:

$$a^2 = b^2 + c^2 . \quad (1)$$

Az ***p*** szakasz hossza az ellipszis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

kanonikus egyenletéből ***x = c***, ***y = p*** helyettesítésével:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{p^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \frac{p}{b} = \frac{b}{a}, \text{ innen:}$$

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (3)$$

Az ellipszis ***e*** *numerikus excentricitása* a ***c*** lineáris excentricitással és az ***a*** fél nagyten - gellyel kifejezve:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4)$$

A fizikai számításokban nem ritka, hogy szükség van a fenti mennyiségek egymással való (további) kifejezéseire – [1].

a) ***a*** kifejezése ***p*** és ***e*** - vel:

(1), (3) és (4) szerint:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a^2} \cdot a = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot a = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \cdot a = a \cdot (1 - e^2), \quad \text{innen:}$$

$$\boxed{a = \frac{p}{1 - e^2}}. \quad (5)$$

b) ***b*** kifejezése ***p*** és ***e*** - vel:

(1), (3) és (4) szerint:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2 \cdot (1 - e^2), \quad \text{innen:}$$

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}; \quad (6)$$

most (5) és (6) - tal:

$$b = \frac{p}{1 - e^2} \cdot \sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad \text{tehát:}$$

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}}. \quad (7)$$

c) ***c*** kifejezése ***p*** és ***e*** - vel:

(4) és (5) - tel:

$$c = a \cdot e = \frac{p \cdot e}{1 - e^2}, \quad \text{tehát:}$$

$$\boxed{c = \frac{p \cdot e}{1 - e^2}}. \quad (8)$$

Látjuk, hogy (5), (7) és (8) az ***a***, ***b***, ***c*** paramétereket a ***p*** és ***e*** paraméterekkel fejezi ki.

2. Az ellipszis polárkoordinátás egyenleteiről

A bolygók mozgásának tanulmányozása során találkozunk *Kepler első törvényével* – [1]. Ez kimondja, hogy

ha az erő a távolság négyzetével fordítottan arányos, akkor a pálya olyan kúpszelet, melynek egyik fókusza az erőcentrumban van.

Eszerint a bolygó – az állónak képzelt Nap körül – kúpszelet alakú pályán mozog, ahol a Nap a kúpszelet (egyik) fókuszpontjában található.

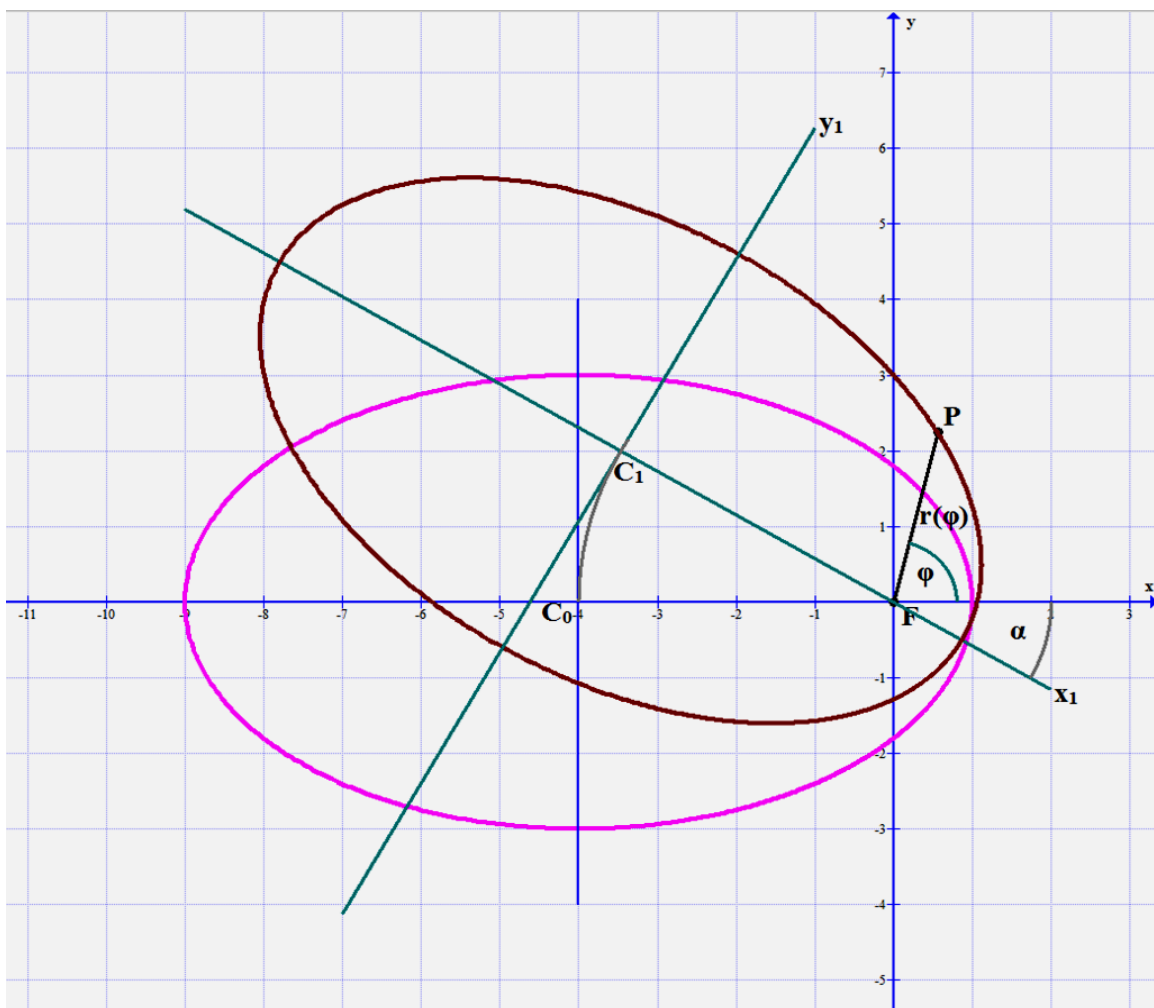
A kúpszelet polárkoordinátás egyenlete általában – [2] – :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+e \cdot \cos(\varphi+\alpha)}, \quad (9)$$

ahol $\alpha = \textit{konst.}$ szögparaméter.

Ábrázoljuk (9) - et, az következő adatokkal – 2. ábra!

$a = 5$ (hosszegység) ; $b = 3$ (h. e.) ; $p = 1,8$ (h. e.) ; $e = 0,8$; $\alpha = 30^\circ$. (A)



2. ábra

Ugyanitt ábrázoltuk az

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+e \cdot \cos(\varphi)} \quad (10)$$

függvényt is. Látjuk, hogy

~ $\alpha = 0$ esetén a polártengely egybeesik az ellipszis nagytengelyével, egyébként általában nem;

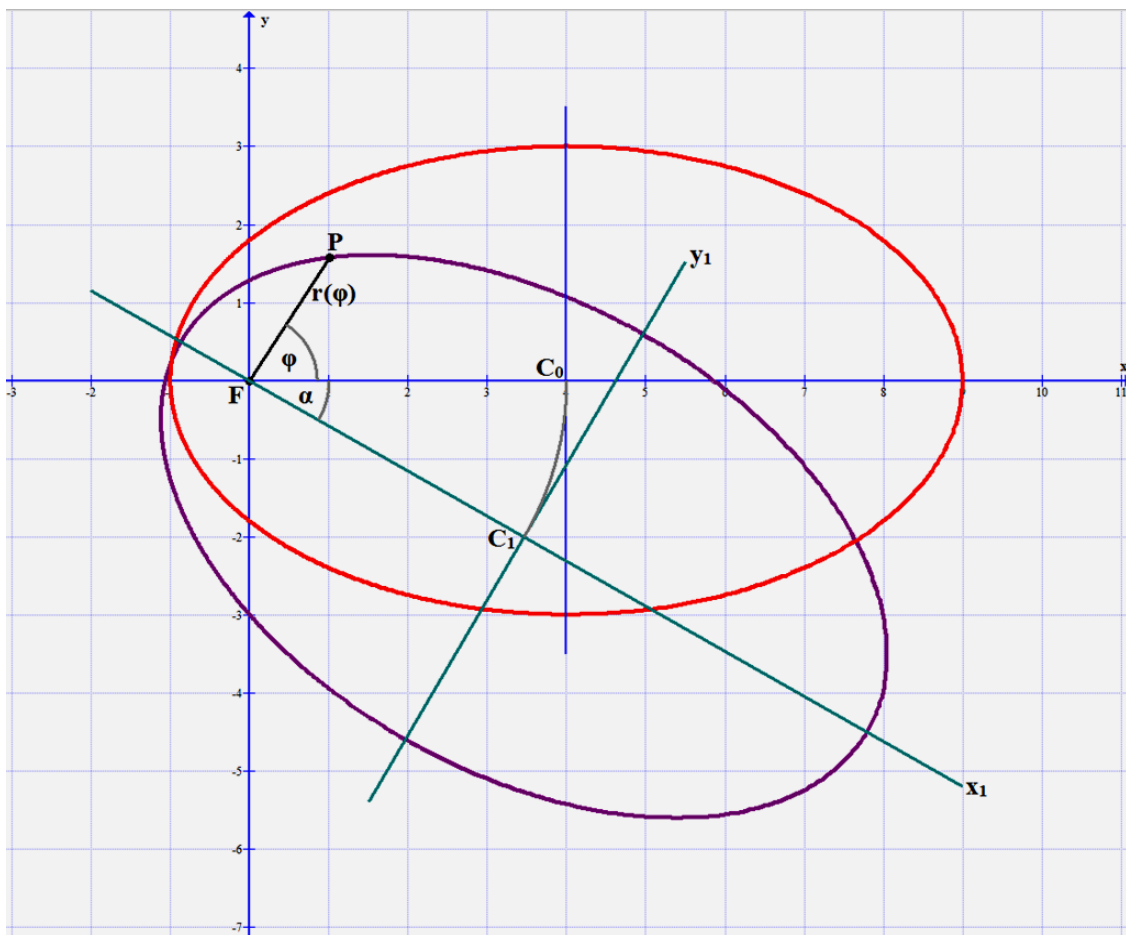
~ az $\alpha \neq 0$ eset ellipszise az előzőnek F körüli α szögű elforgatottja.

Most vegyük az

$$r(\varphi) = \frac{p}{1-e \cdot \cos(\varphi+\alpha)} \quad (11)$$

kúpszelet - egyenletet! Ez (9) - től csak az e előtti előjelben különbözik.

Nézzük meg, most hogyan fest ellipszisünk – 3. ábra!



3. ábra

Itt azt látjuk, hogy most az ellipszis másik fókusza körül jött létre az α szögű elforgatás, az

$\alpha = 0$ esethez képest. A két ellipszis eltolással fedésbe hozható, tehát ugyanazt az ellipszist írja le a „+” és a „-” előjeles változat is, csak más - más koordináta - rendszerben.

Ezek szerint megállapíthatjuk, hogy az

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 \pm e \cdot \cos(\varphi + \alpha)} \quad (12)$$

egyenlet $0 < e < 1$ esetén ellipszist ír le.

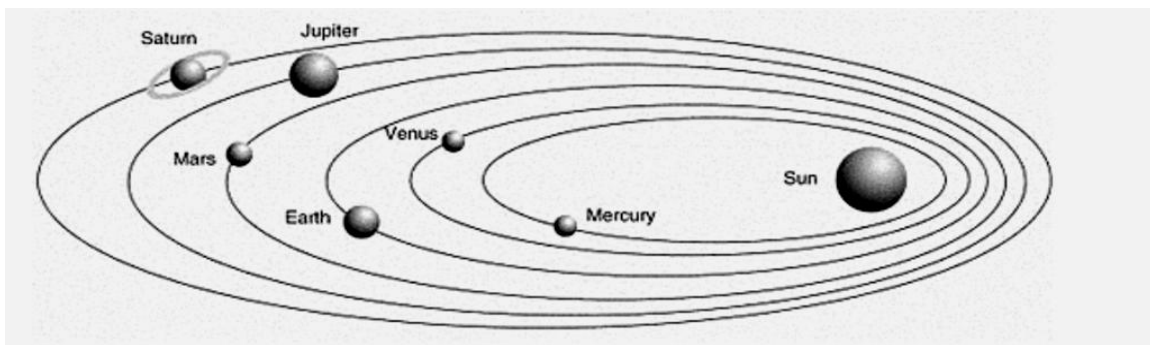
Megjegyzések:

M1. Az [1] műben az (5) és (8) képletek $e \rightarrow \varepsilon$ megfelelői sajtóhibásak lettek. A kúpszelet numerikus excentricitását gyakran ε - nal jelölik.

M2. A kúpszelet fajtáját e értéke így határozza meg – [1] , [2]:

- ~ $e = 0$: kör;
- ~ $0 < e < 1$: ellipszis;
- ~ $e = 1$: parabola;
- ~ $e > 1$: hiperbola.

M3. Láttuk, hogy a 2. és a 3. ábrák ellipszisei egymásba elforgatással és / vagy eltolással fedésbe hozhatók. Ez azt jelenti, hogy **ugyanazon egy** ellipszis leírható a (12) képlet bármelyik változatával. Más a helyzet, ha **több** ellipszist kell egyidejűleg ábrázolnunk; ekkor már nem lényegtelen az ellipszisek kölcsönös helyzete, ugyanazon k. r. - ben, így fontos lehet, hogy egyazon képlet - alakkal dolgozzunk. Ha például a Naprendszer bolygópályáinak ábrázolására vállalkoznánk, akkor ugyanazon k. r. - ben dolgozva több különböző alakú ellipszist rajzolnánk, hiszen a fő vonzócentrum a Nap, ami az ellipszisek (egyik) fókuszában található – 4. ábra.



Ha nem csak a bolygópályák alakja, hanem a bolygók pillanatnyi helyzete és sebessége is érdekes, akkor különösen fontos lehet egyazon k. r. - ben leírni az összes bolygó mozgását. Ez egy egyszerűsített modell lenne, hiszen igazából egy bolygóra nem csak a Nap tömeg - vonzása hat, hanem a többié is, vagyis nem kéttest -, hanem többtest - problémáról van szó. Továbbá ha csak két testet veszünk is, azok a közös tömegközéppontjuk körül végzik mozgásukat, vagyis itt a Nap sem áll már egyhelyben; kivéve, ha pl. a Földnek a Naphoz viszonyított mozgását akarjuk leírni, hiszen közvetlenül csak ez a mozgás figyelhető meg – [2].

M4. Nem feledjük, hogy létezik az ellipszisnek olyan polárkoordinátás leírása is, ahol a pólus az ellipszis C centruma. Ezzel kapcsolatban az érdeklődő Olvasó figyelmébe ajánljuk egy korábbi dolgozatunkat, melynek címe:

Általános helyzetű ellipszis paraméteres egyenletrendszer.

M5. A látottak alapján nekünk úgy tűnik, hogy az ellipszis polárkoordinátás leírásánál a fókuszban felvett pólus esete dominál, ellentétben a centrumban fekvő pólus esetével. Valószínűleg az lehet az oka ennek a jelenségnek, hogy a fizikai számításokban – pl. a Kepler ~ problémánál is – ez az eset a gyakoribb.

E sorok írója nem véletlenül „népszerűsíti” más helyeken a centrumban fekvő pólus esetét: a szimmetria miatt is sokkal egyszerűbben áttekinthetők a geometriai viszonyok, mint a fókuszban fekvő pólus esetében. Ezt emelik ki a fentebb vizsgált esetek is, melyeket a félreértések elkerülése érdekében vettünk elő.

Saját ábráink a **Graph** ingyenes szoftverrel készültek.

M6. Az ellipszis polárkoordinátás, *fókusz - pólusú* egyenletének levezetése az alábbiak szerint is történhet – [3]. Ehhez tekintsük az 5. ábrát is! Itt megmutatnak egy lehetséges számítási módot, de a levezetést nem részletezik. Most ez következik.

Tekintsük először az x tengely mentén u_i -vel ($i = 1, 2$) eltoltt helyzetű ellipszis egyenletét, melyet a (2) kanonikus – tehát a $C = O$ centrum - orgójú – egyenletéből képezhetünk!

$$\left(\frac{x-u_i}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 ; i = 1, 2 ; \quad (13)$$

$$u_1 = -c , u_2 = +c , c > 0. \quad (14)$$

A derékszögű és a polárkoordináták összefüggései:

$$x = r \cdot \cos \varphi , y = r \cdot \sin \varphi . \quad (15)$$

Most jöjjön az 5. ábrán említett hosszabb, de elemi számítás, az $r(\varphi)$ függvény előállítására! Ehhez helyettesítsük be (13) - ba (15) - öt! Ekkor:

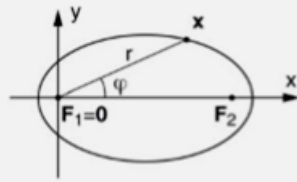


Fig. 1.37: Zur Polarkoordinatendarstellung der Ellipse

Polarkoordinatendarstellung der Ellipse: Liegt der Brennpunkt F_1 der Ellipse in $\mathbf{0}$ und der Mittelpunkt bei $x = e$ auf der x -Achse, so erhält man die zugehörige Ellipsengleichung

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte 39

Mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ erhält man durch Auflösen nach r (durch längere, aber elementare, Rechnung) die

$$\text{Polargleichung der Ellipse} \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}. \quad (1.89)$$

5. ábra – forrása: [3]

$$\left(\frac{r \cdot \cos \varphi - u_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{r \cdot \sin \varphi}{b} \right)^2 = 1; \text{ négyzetre emeléssel:}$$

$$\frac{r^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi + u_i^2}{a^2} + \frac{r^2 \cdot \sin^2 \varphi}{b^2} = 1; \quad | \cdot a^2$$

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi + u_i^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2; \quad (a)$$

(14) -ből:

$$u_i^2 = c^2, \quad (b)$$

így (a) és (b) -vel:

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi + c^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2; \quad (c)$$

most (1) -ből:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (d)$$

így (c) és (d) -vel:

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi + \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi = b^2; \text{ rendezve:}$$

$$r^2 \cdot \cos^2 \varphi + \frac{a^2}{b^2} \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi = b^2 + 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi; \quad (e)$$

kiemeléssel:

$$r^2 \cdot \left(\cos^2 \varphi + \frac{a^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi \right) = b^2 + 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi; \quad (f)$$

a bal oldali zárójeles kifejezést átalakítjuk, (d) -vel is:

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi + \frac{a^2}{b^2} \cdot \sin^2 \varphi &= \cos^2 \varphi + \frac{a^2}{b^2} \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = \cos^2 \varphi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{a^2}{b^2} = \\ &= \cos^2 \varphi \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi ;\end{aligned}\quad (g)$$

majd (f) és (g) - vel:

$$\begin{aligned}r^2 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi\right) &= b^2 + 2 \cdot u_i \cdot r \cdot \cos \varphi ; \text{ rendezve:} \\ \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi\right) \cdot r^2 - (2 \cdot u_i \cdot \cos \varphi) \cdot r - b^2 &= 0 .\end{aligned}\quad (h)$$

A másodfokú egyenlet megoldó - képletével:

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= \frac{2 \cdot u_i \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{(2 \cdot u_i \cdot \cos \varphi)^2 - 4 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi\right) \cdot (-b^2)}}{2 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi\right)} ; \text{ majd (b) - vel is:} \\ r_{1,2} &= \frac{u_i \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{(u_i \cdot \cos \varphi)^2 + a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi}}{\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \cdot \cos^2 \varphi} = b^2 \cdot \frac{u_i \cdot \cos \varphi \pm \sqrt{c^2 \cdot \cos^2 \varphi + a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi}}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} ,\end{aligned}$$

$$r_{1,2} = b^2 \cdot \frac{u_i \cdot \cos \varphi \pm a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} . \quad (i)$$

Mint ahogy

$$r > 0 , \quad (j)$$

ezért (i) - ben a „+” előjel választandó:

$$r(\varphi) = b^2 \cdot \frac{u_i \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} . \quad (k)$$

Most alkalmazzuk a (14) szerinti u_i - ket! Ekkor (k) - ből:

$$r_{I,II}(\varphi) = b^2 \cdot \frac{u_{1,2} \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} ; \text{ részletezve , (3) és (4) - gyel is:}$$

$$\begin{aligned}r_I(\varphi) &= b^2 \cdot \frac{u_1 \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} = b^2 \cdot \frac{-c \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} = b^2 \cdot \frac{a - c \cdot \cos \varphi}{(a - c \cdot \cos \varphi) \cdot (a + c \cdot \cos \varphi)} = \\ &= \frac{b^2}{a + c \cdot \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi} , \text{ tehát:}\end{aligned}$$

$$\underline{r_I(\varphi)|_{u_1=-c} = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \varphi} .} \quad (16)$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned}r_{II}(\varphi) &= b^2 \cdot \frac{u_2 \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} = b^2 \cdot \frac{c \cdot \cos \varphi + a}{a^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} = b^2 \cdot \frac{a + c \cdot \cos \varphi}{(a - c \cdot \cos \varphi) \cdot (a + c \cdot \cos \varphi)} = \\ &= \frac{b^2}{a - c \cdot \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi} = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi} , \text{ tehát:}\end{aligned}$$

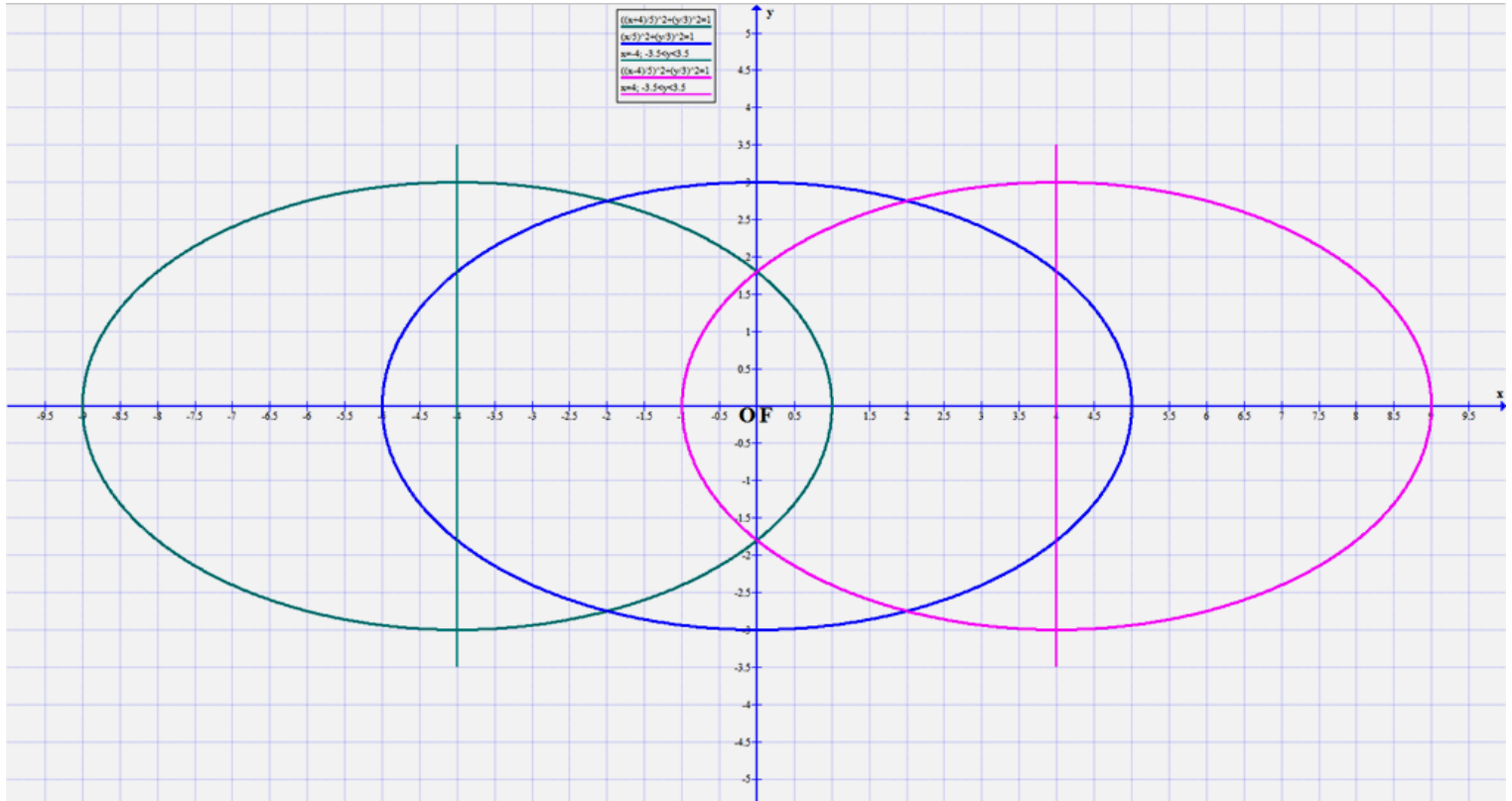
$$\underline{r_{II}(\varphi)|_{u_2=+c} = \frac{p}{1-e \cdot \cos \varphi} = \frac{a \cdot (1-e^2)}{1-e \cdot \cos \varphi}}. \quad (17)$$

Látjuk, hogy a már korábban is látott egyenletekre jutottunk, vagyis – 6. ábra – :

~ ha $\mathbf{u}_1 = -c$, akkor $\mathbf{O} = \mathbf{F}_2$,

~ ha $\mathbf{u}_2 = +c$, akkor $\mathbf{O} = \mathbf{F}_1$,

ha megtartjuk az 5. ábra fókusz - jelöléseit.



6. ábra

A 6. ábrán megrajzoltuk a kék ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \text{ h. e.}$) $\mathbf{O}$ középpontú ellipszist, majd a balra eltolt zöldesszürke ($\mathbf{u}_1 = -4 \text{ h. e.}$), azután a jobbra eltolt magenta ($\mathbf{u}_2 = +4 \text{ h. e.}$) ellipsziseket. A zöldesszürke ellipszis pólusa a „jobb oldali” fókusza, a magenta ellipszis pólusa a „bal oldali” fókusza. Az ellipszisek adatai itt is (A) szerintiek.

Látjuk, hogy a koordináta - geometriai helyzet nem is annyira egyszerű, így valószínűleg hasznos volt ezt így végiggondolni, az ábrákat és az egyenleteket (ismét) párosítva.

Irodalom:

- [1] – **Gombás Pál ~ Kisdi Dávid:** Bevezetés az elméleti fizikába I. kötet
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971., 68 - 69. o.
- [2] – **Budó Ágoston:** Mechanika
5. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972., 96., 172., 190 - 192. o.
- [3] – **Klemens Burg ~ Herbert Haf ~ Friedrich Wille ~ Andreas Meister:**
Vektoranalysis , 2. Auflage
Springer Vieweg, Wiesbaden, 2012., 38 - 39. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Szödliget, 2017. július 7.